合肥市2019年高三第三次教学质量检测

数学试题（理科）参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	D	A	B	B	A	B	B	D	C	D

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 8　　14. $-\frac{7}{4}$　　15. $-\frac{1}{4}$　　16. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

三、解答题：

17. (本小题满分12分)

解：(Ⅰ)当$n=1$时，$a_1=1$，故$b_1=6$.

当$n\ge 2$时，$a_n=2a_{n-1}+2n-1$，

则$b_n=a_n+2n+3=2a_{n-1}+2n-1+2n+3=2(a_{n-1}+2n+1)=2\left[a_{n-1}+2(n-1)+3\right]$，

$\therefore b_n=2b_{n-1}$，

∴数列$\{b_n\}$是首项为6，公比为2的等比数列.　　…………………………6分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得$b_n=3\times 2^n$，$\therefore a_n=b_n-2n-3=3\times 2^n-2n-3$，

$\therefore S_n=3\left(2+2^2+\cdots+2^n\right)-2\left(1+2+\cdots+n\right)-3n=3\cdot\frac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}-n\left(n+1\right)-3n$，

$\therefore S_n=3\times 2^{n+1}-n^2-4n-6$.　　…………………………12分

18. (本小题满分12分)

解：(Ⅰ)由题意得：

	城镇居民	农村居民	合计
经常阅读	100	24	124
不经常阅读	50	26	76
合计	150	50	200

则$K^2=\frac{200\times\left(100\times 26-50\times 24\right)^2}{150\times 50\times 124\times 76}=\frac{9800}{1767}\approx 5.546>5.024$。

所以，有97.5%的把握认为经常阅读与居民居住地有关.　　…………………………6分

(Ⅱ)根据样本估计，从该地区城镇居民中随机抽取1人，抽到经常阅读的人的概率是$\frac{2}{3}$，

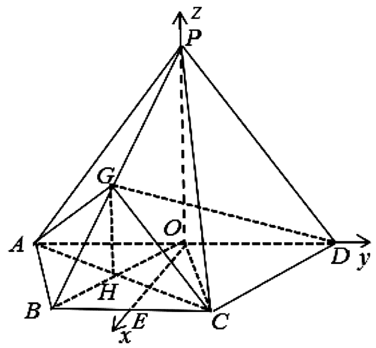
且$X\sim B$（4，$\frac{2}{3}$），所以X的分布列为：

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

$\therefore E\left(X\right)=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$.　　…………………………12分

19. (本小题满分 12 分)

解：(Ⅰ)取 AD 的中点为 O，连结 OP，OB，OC.设 OB 交 AC 于点 H，连结 GH.



$\because AD \parallel BC$， $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$

∴四边形 ABCO 与四边形 OBCD 均为菱形

∴OB⊥AC，$OB \parallel CD$　　∴$CD \perp AC$.

$\because \Delta PAD$为等边三角形，O为AD中点

$\therefore PO \perp AD$

$\because$平面$PAD \perp$平面$ABCD$且平面$PAD \cap$平面$ABCD = AD$，

$PO \subset$平面PAD且$PO \perp AD$

$\therefore PO \perp$平面$ABCD$

∵$CD \subset$平面$ABCD$　∴$PO \perp CD$

∵H，G 分别为 OB， PB 的中点　∴$GH \parallel PO$

∴$GH \perp CD$

又∵$GH \cap AC = H$　∴$CD \perp$平面GAC.　　………………………6 分

(Ⅱ)取 BC 的中点为 E，以 O 为空间坐标原点，分别以$\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OP}$的方向为x轴、y轴、z轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系$O - xyz$.

设 AD=4，则P（0，0，$2\sqrt{3}$），A（0，-2，0），C（$\sqrt{3}$，1，0），D（0，2，0），$G\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$.

$\overrightarrow{AP} =$（0，2，$2\sqrt{3}$），$\overrightarrow{AG} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$.

设平面 PAG 的一个法向量$\vec{n} = (x，y，z)$.

由$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 2\sqrt{3}z = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{3}z \\ x = z \end{cases}$. 令$z = 1$，则$\vec{n} = (1，-\sqrt{3}，1)$.

由(Ⅰ)可知，平面 AGC 的一个法向量为$\overrightarrow{CD} = (-\sqrt{3}，1，0)$.

∴二面角$P - AG - C$的平面角θ的余弦值$\cos\theta = -\left|\frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{CD}}{|\vec{n}||\overrightarrow{CD}|}\right| = -\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{15}}{5}$.……………12 分

20. (本小题满分 12 分)

解：(Ⅰ)由已知，得$\begin{cases} c = 1 \\ 4a = 8 \end{cases}$，∴$\begin{cases} c = 1 \\ a = 2 \end{cases}$，∴$b^2 = 3$，

∴椭圆 C 的标准方程$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.　　……………………………6 分

(Ⅱ)若直线l的斜率不存在，则直线m的斜率也不存在，这与直线m与直线l相交于点P矛盾，所以直线l的斜率存在.

令$l: y = k(x-1)$（$k \neq 0$），$m: y = -k(x+t)$，$A(x_A，y_A)$，$B(x_B，y_B)$，$M(x_M，y_M)$，$N(x_N，y_N)$.

将直线m的方程代入椭圆方程得：$(3+4k^2)x^2 + 8k^2tx + 4(k^2t^2 - 3) = 0$，

$\therefore x_M+x_N=-\dfrac{8k^2t}{3+4k^2}$，$x_Mx_N=\dfrac{4\left(k^2t^2-3\right)}{3+4k^2}$，$\therefore |MN|^2=\left(1+k^2\right)\bullet\dfrac{16\left(12k^2-3k^2t^2+9\right)}{\left(3+4k^2\right)^2}$.

同理，$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{4\sqrt{9k^2+9}}{3+4k^2}=\dfrac{12\left(1+k^2\right)}{3+4k^2}$.

由$|MN|^2=4|AB|$得$t=0$，此时，$\Delta=64k^4t^2-16\left(3+4k^2\right)\left(k^2t^2-3\right)>0$，

$\therefore$直线$m:y=-kx$，

$\therefore P\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}k\right)$，即点$P$在定直线$x=\dfrac{1}{2}$上. ……………………………12 分

21. (本小题满分 12 分)

解:（Ⅰ）$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$. $g(x)=f'(x)=2x-a\ln x-a$，$g'(x)=2-\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x-a}{x}$.

当$a\le 0$时，$g'(x)>0$，函数$y=g(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，函数$y=g(x)$没有极值.

当$a>0$时，由$g'(x)=0$，得$x=\dfrac{a}{2}$，函数$y=g(x)$在$\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{a}{2},+\infty\right)$上单调递增.

函数$y=g(x)$的极小值为$g\left(\dfrac{a}{2}\right)=-a\ln\dfrac{a}{2}$，没有极大值. ……………………………6 分

（Ⅱ）

(解法一) 依题意，要使得$f(x)>0$对$\forall x\in[1,e]$恒成立，只需$f(x)_{\min}>0$即可.

⑴当$a\le 2$时，由（Ⅰ）可知，$g'(x)=\dfrac{2x-a}{x}\ge 0$，函数$g(x)$在$[1,e]$上单调递增，$g(x)\ge g(1)=2-a\ge 0$.

函数$f(x)$在$[1,e]$上单调递增，$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=2+a>0$ 即$-2<a\le 2$.

⑵当$2<a<2e$时，由（Ⅰ）可知，函数$g(x)$在$\left[1,\dfrac{a}{2}\right]$上单调递减，在$\left[\dfrac{a}{2},e\right]$上单调递增.

①当$2<a<e$时，$g(1)=2-a<0$，$g\left(\dfrac{a}{2}\right)=-a\ln\dfrac{a}{2}<0$，$g(e)=2(e-a)>0$.

由零点存在性定理可知，存在唯一$x_0\in\left(\dfrac{a}{2},e\right)$，使得$g(x_0)=0$，即$2x_0-a\ln x_0-a=0$.

$\therefore a\ln x_0=2x_0-a$，此时，函数$f(x)$在$[1,x_0]$上单调递减，在$[x_0,e]$上单调递增.

$f(x)_{\min}=f(x_0)=x_0^2-ax_0\ln x_0+a+1=x_0^2-x_0(2x_0-a)+a+1=1-x_0^2+a(x_0+1)$

$=(x_0+1)(1+a-x_0)$.

$\because x_0+1>0$，且$1+a-x_0>0$，满足$f(x)_{\min}>0$，$\therefore 2<a<e$符合题意.

②当$e\le a<2e$时，$g(x)_{\max}=\max\{g(1),g(e)\}=\max\{2-a,2e-2a\}\le 0$，

此时，函数$f(x)$在$[1,e]$上单调递减，$f(x)_{\min}=f(e)=e^2-ae+a+1>0$，即$e\le a<\dfrac{e^2+1}{e-1}$.

⑶当$a\ge 2e$时，$g'(x)=\dfrac{2x-a}{x}\le 0$，函数$g(x)$在$[1,e]$上单调递减，$g(x)\le g(1)=2-a<0$，

此时，函数$f(x)$在$[1,\ e]$上单调递减，$f(x)_{\min}=f(e)=e^2-ae+a+1>0$，

解得$a<\dfrac{e^2+1}{e-1}$，与$a\ge 2e$矛盾，故舍去.

综上得，$-2<a<\dfrac{e^2+1}{e-1}$. ……………………………12 分

(解法二) 对$\forall x\in[1,\ e]$，$f(x)>0$恒成立，即对$\forall x\in[1,\ e]$，$x^2-ax\ln x+a+1>0$，

∴对$\forall x\in[1,\ e]$，$x-a\ln x+\dfrac{a+1}{x}>0$.

令$h(x)=x-a\ln x+\dfrac{a+1}{x}$，则$h'(x)=1-\dfrac{a}{x}-\dfrac{a+1}{x^2}=\dfrac{x^2-ax-(a+1)}{x^2}=\dfrac{(x+1)(x-a-1)}{x^2}$.

①当$a+1\le 1$，即$a\le 0$时，对$\forall x\in[1,\ e]$，$h'(x)\ge 0$，∴$h(x)$在$[1,\ e]$上单调递增，

∴$h(x)_{\min}=h(1)=2+a>0$，解得$a>-2$，∴$-2<a\le 0$满足题意.

②当$a+1\ge e$，即$a\ge e-1$时，对$\forall x\in[1,\ e]$，$h'(x)\le 0$，∴$h(x)$在$[1,\ e]$上单调递减，

∴$h(x)_{\min}=h(e)=e-a+\dfrac{a+1}{e}>0$，解得$a<\dfrac{e^2+1}{e-1}$，∴$e-1\le a<\dfrac{e^2+1}{e-1}$满足题意.

③当$1<a+1<e$，即$0<a<e-1$时，对于$x\in[1,\ a+1)$，$h'(x)<0$；对于$x\in[a+1,\ e]$，$h'(x)>0$，

∴$h(x)$在$[1,\ a+1]$上单调递减，在$[a+1,e]$上单调递增，

∴$h(x)_{\min}=h(a+1)=a\left(1+\dfrac{2}{a}-\ln(a+1)\right)$.

设$H(a)=1+\dfrac{2}{a}-\ln(a+1)$，由于$H(a)=1+\dfrac{2}{a}-\ln(a+1)$在$(0,\ e-1)$单调递减，

∴$H(a)=1+\dfrac{2}{a}-\ln(a+1)>1+\dfrac{2}{e-1}-\ln e=\dfrac{2}{e-1}>0$，即$h(x)_{\min}=aH(a)>0$，

∴$0<a<e-1$满足题意.

综上①②③可得，$-2<a<\dfrac{e^2+1}{e-1}$. ……………………………12 分

22. (本小题满分 10 分)

解：(Ⅰ)曲线C：$x^2+y^2=4$（$y\ge 0$），曲线E：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………5 分

(Ⅱ)设A（$2\cos\alpha, 2\sin\alpha$），$\alpha\in[0,\ \pi]$，要使得ΔAOB面积的最大，则B（$2\cos\alpha,-\sin\alpha$）.

$S_{\Delta AOB}=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|x_B|=\dfrac{1}{2}\cdot 3\sin\alpha\cdot 2\cos\alpha=\dfrac{3}{2}\sin 2\alpha$.

$\because 2\alpha\in[0,2\pi]$

∴当$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$时，ΔAOB的面积取最大值$\dfrac{3}{2}$. ……………………………10 分

23. (本小题满分 10 分)

解:（Ⅰ）$f\left(x\right)=3\left|x-1\right|+\left|x+1\right|=\begin{cases}-4x+2, & x\le -1\\ -2x+4, & -1<x<1\\ 4x-2, & x\ge 1\end{cases}$

当$x=1$时，$f\left(x\right)$的最小值为$k=2$. ……………………………5 分

(Ⅱ)依题意，$m^2+4n^2=2$.

$$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2+1}=\frac{1}{m^2}+\frac{4}{4n^2+4}=\left(\frac{1}{m^2}+\frac{4}{4n^2+4}\right)\left(m^2+4n^2+4\right)\cdot\frac{1}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\left[1+\frac{4n^2+4}{m^2}+\frac{4m^2}{4n^2+4}+4\right]\ge\frac{1}{6}\left(5+2\sqrt{4}\right)=\frac{3}{2}.$$

当且仅当$\frac{4n^2+4}{m^2}=\frac{4m^2}{4n^2+4}$，即$m^2=2$，$n=0$时，等号成立.

……………………………10 分