

数学试题(理科)

(考试时间:120 分钟 满分:150 分)

注意事项:

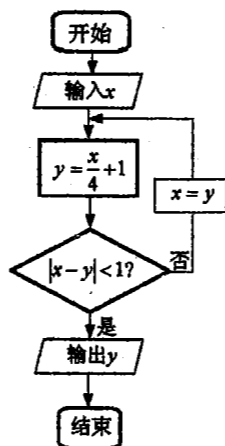
1. 答题前,务必在答题卡和答题卷规定的地方填写自己的姓名、准考证号和座位号后两位。
2. 答第 I 卷时,每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。
3. 答第 II 卷时,必须使用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卷上书写,要求字体工整、笔迹清晰。作图题可先用铅笔在答题卷规定的位置画出,确认后再用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔描清楚。必须在题号所指示的答题区域作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上答题无效。

第 I 卷(满分 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 R 是实数集,集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{x | 2x - 1 \geq 0\}$, 则 $A \cap (\complement_R B) =$
 (A) $\{-1, 0\}$ (B) $\{1\}$ (C) $[\frac{1}{2}, 1]$ (D) $(-\infty, \frac{1}{2})$
2. 已知 i 是虚数单位,复数 z 满足 $z + z \cdot i = 3 + i$, 则复数 z 的共轭复数为
 (A) $1 + 2i$ (B) $1 - 2i$
 (C) $2 + i$ (D) $2 - i$
3. 执行如图所示的程序框图,若输入 $x = -1$, 则输出的 $y =$
 (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$
 (C) $\frac{7}{16}$ (D) $\frac{19}{16}$
4. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 + a_2 + a_3 = 4$, $S_6 = 10$, 则 $a_5 =$
 (A) 2 (B) $\frac{16}{9}$ (C) $\frac{20}{9}$ (D) $\frac{7}{3}$
5. 某企业的一种商品的产量与单位成本数据如下表:

产量 x (万件)	14	16	18	20	22
单位成本 y (元/件)	12	10	7	a	3



若根据表中提供的数据,求出 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = -1.15x + 28.1$, 则 a 的值等于
 (A) 4.5 (B) 5 (C) 5.5 (D) 6

6. 若直线 $y = k(x + 1)$ 与不等式组 $\begin{cases} 2y - x \leq 4 \\ 3x - y \leq 3 \\ 2x + y \geq 2 \end{cases}$ 表示的平面区域有公共点, 则实数 k 的取值范围是
 (A) $(-\infty, 1]$ (B) $[0, 2]$ (C) $[-2, 1]$ (D) $(-2, 2]$

7. 为了得到函数 $y = \sin x$ 的图像, 只需将函数 $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图像
 (A) 横坐标伸长为原来的两倍, 纵坐标不变, 再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位
 (B) 横坐标伸长为原来的两倍, 纵坐标不变, 再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位
 (C) 横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 再向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位
 (D) 横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位

8. 若 a, b 是从集合 $\{-1, 1, 2, 3, 4\}$ 中随机选取的两个不同元素, 则使得函数 $f(x) = x^{5a} + x^b$ 是奇函数的概率为

- (A) $\frac{3}{20}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{9}{25}$ (D) $\frac{3}{5}$

9. 已知直线 $l: x - \sqrt{3}y - a = 0$ 与圆 $C: (x - 3)^2 + (y + \sqrt{3})^2 = 4$ 交于点 M, N , 点 P 在圆 C 上, 且 $\angle MPN = \frac{\pi}{3}$, 则 a 的值为

- (A) 2 或 10 (B) 4 或 8 (C) $6 \pm 2\sqrt{2}$ (D) $6 \pm 2\sqrt{3}$

10. 已知 F 是抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 抛物线 C 上动点 A, B 满足 $\overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{FB}$, 若 A, B 在准线上的射影分别为 M, N , 且 $\triangle MFN$ 的面积为 5, 则 $|AB| =$

- (A) $\frac{9}{4}$ (B) $\frac{13}{4}$ (C) $\frac{21}{4}$ (D) $\frac{25}{4}$

11. 若存在两个正实数 x, y , 使得等式 $x(1 + \ln x) = x \ln y - ay$ 成立(其中 $\ln x, \ln y$ 是以 e 为底的对数), 则实数 a 的取值范围是

- (A) $(0, \frac{1}{e^2}]$ (B) $(0, \frac{1}{e}]$ (C) $(-\infty, \frac{1}{e^2}]$ (D) $(-\infty, \frac{1}{e}]$

12. 已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为 2, 过点 A 的直线 l 与过 BC 的平面 α 交于点 D , 将平面 α 绕 BC 转动(不与平面 ABC 重合), 且三条直线 l, AB, AC 与平面 α 所成的角始终相等. 当三棱锥 $A-BCD$ 体积最大时, l 与平面 α 所成角的余弦值为

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{21}}{7}$ (D) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

准考证号 姓名 班级 学校

密封线内不要答题

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

本卷包括必考题和选考题两部分. 第(13)题~第(21)题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第(22)题、第(23)题为选考题, 考生根据要求作答.

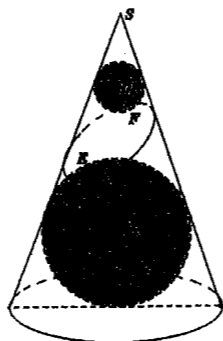
二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分. 把答案填在答题卡上相应的位置.

13. 已知 $a=(1,2), b=(4,k)$, 若 $(a+2b) \parallel (3a-b)$, 则 $k=$ _____.

14. 在 $(x^3 - \frac{1}{2x})^8$ 的展开式中, x^4 的系数为 _____.

15. 已知函数 $f(x) = 2\cos(x + \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4}) + \sin x$, 若对任意的实数 x , 恒有 $f(a_1) \leq f(x) \leq f(a_2)$, 则 $\cos(a_1 - a_2) =$ _____.

16. 右图是数学家 *Germinal Dandelin* 用来证明一个平面截圆锥得到的截面曲线是椭圆的模型(称为“Dandelin 双球”). 在圆锥内放两个大小不同的小球, 使得它们分别与圆锥的侧面、截面相切. 设图中球 O_1 , 球 O_2 的半径分别为 3 和 1, 球心距离 $|O_1O_2| = 8$, 截面分别与球 O_1 , 球 O_2 切于点 E, F (E, F 是截面椭圆的焦点), 则此椭圆的离心率等于 _____.



三、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_n=2a_{n-1}+2n-1 (n \geq 2)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=a_n+2n+3$.

(I) 求证数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(II) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

18. (本小题满分 12 分)

在第十五次全国国民阅读调查中, 某地区调查组获得一个容量为 200 的样本, 其中城镇居民 150 人, 农村居民 50 人. 在这些居民中, 经常阅读的城镇居民 100 人, 农村居民 24 人.

(I) 填写下面列联表, 并判断是否有 97.5% 的把握认为, 经常阅读与居民居住地有关?

	城镇居民	农村居民	合计
经常阅读	100	24	
不经常阅读			
合计			200

(II) 从该地区居住城镇的居民中, 随机抽取 4 位居民参加一次阅读交流活动, 记这 4 位居民中经常阅读的人数为 X . 若用样本的频率作为概率, 求随机变量 X 的分布列和期望.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

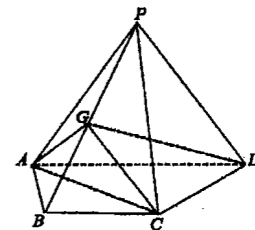
19. (本小题满分 12 分)

已知: 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AB=BC=CD=\frac{1}{2}AD$,

G 是 PB 中点, $\triangle PAD$ 是等边三角形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.

(I) 求证: $CD \perp$ 平面 GAC ;

(II) 求二面角 $P-AG-C$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知直线 l 经过椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点 $(1,0)$, 交椭圆 C 于点 A, B , 点 F 为椭圆 C 的左焦点, $\triangle ABF$ 的周长为 8.

(I) 求椭圆 C 的标准方程;

(II) 若直线 m 与直线 l 的倾斜角互补, 且交椭圆 C 于点 M, N , $|MN|^2 = 4|AB|$, 求证: 直线 m 与直线 l 的交点 P 在定直线上.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - ax \ln x + a + 1$.

(I) 试讨论函数 $f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的极值;

(II) 若 $\forall x \in [1, e]$ (e 为自然对数的底数), $f(x) > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

请考生在第(22)、(23)题中任意选择一题作答. 注意: 只能做所选定的题目, 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时, 请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=2\cos\alpha \\ y=2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数, $\alpha \in [0, \pi]$). 在以直角坐

标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 E 的方程为 $\rho^2(1+3\sin^2\theta) = 4$.

(I) 求曲线 C 和曲线 E 的直角坐标方程;

(II) 若直线 $l: x=t$ 分别与曲线 C 、曲线 E 交于点 A, B , 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

设 $f(x) = 3|x-1| + |x+1|$ 的最小值为 k .

(I) 求实数 k 的值;

(II) 设 $m, n \in R, m \neq 0, m^2 + 4n^2 = k$, 求证: $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2+1} \geq \frac{3}{2}$.