

数学试题(文科)

(考试时间:120 分钟 满分:150 分)

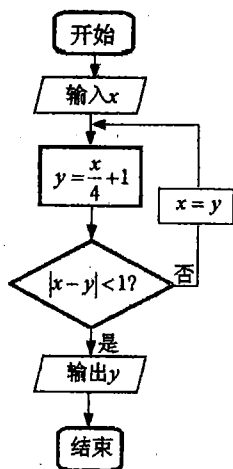
注意事项:

1. 答题前,务必在答题卡和答题卷规定的地方填写自己的姓名、准考证号和座位号后两位。
2. 答第 I 卷时,每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。
3. 答第 II 卷时,必须使用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卷上书写,要求字体工整、笔迹清晰。作图题可先用铅笔在答题卷规定的位置绘出,确认后再用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔描清楚。必须在题号所指示的答题区域作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上答题无效。

第 I 卷(满分 60 分)

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $z = \frac{5}{2-i}$ 在复平面上的对应点位于
 (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
2. 已知 R 是实数集,集合 $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{x | 2x - 1 \geq 0\}$, 则 $A \cap (\complement_R B) =$
 (A) $(-\infty, \frac{1}{2})$ (B) $[\frac{1}{2}, 1]$
 (C) $\{1\}$ (D) $\{-1, 0\}$
3. 执行如图所示的程序框图,若输入 $x = -1$, 则输出的 $y =$
 (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$
 (C) $\frac{7}{16}$ (D) $\frac{19}{16}$
4. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若 $a_1 + a_2 + a_3 = 4$, $S_5 = 10$, 则 $a_5 =$
 (A) 2 (B) $\frac{16}{9}$
 (C) $\frac{20}{9}$ (D) $\frac{7}{3}$



5. 若向量 a, b 的夹角为 120° , $|a| = 1$, $|a - 2b| = \sqrt{7}$, 则 $|b| =$

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (C) 1 (D) 2

6. 若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3}) - 1$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$, 则 $f(x)$ 图象的一条对称轴为

- (A) $x = -\frac{\pi}{18}$ (B) $x = -\frac{5\pi}{2}$ (C) $x = \frac{7\pi}{18}$ (D) $x = \frac{\pi}{2}$

7. 已知 a, b 为两条不同的直线, α, β, γ 为三个不同的平面, 则下列说法正确的是

- (A) 若 $a // b, b \subset \alpha$, 则 $a // \alpha$
 (B) 若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, a // b$, 则 $\alpha // \beta$
 (C) 若 $\alpha // \beta, a // \alpha$, 则 $a // \beta$
 (D) 若 $\alpha \cap \beta = a, \beta \cap \gamma = b, \alpha \cap \gamma = c, a // b$, 则 $b // c$

8. 在区间 $[-4, 4]$ 上任取一个实数 a , 使得方程 $\frac{x^2}{a+2} + \frac{y^2}{a-3} = 1$ 表示双曲线的概率为

- (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{5}{8}$

9. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $a \sin B = 2b \sin C, b = 3, \cos B = \frac{1}{4}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为

- (A) $9\sqrt{15}$ (B) $\frac{9\sqrt{15}}{16}$ (C) $\frac{3\sqrt{15}}{16}$ (D) $\frac{9}{16}$

10. 已知直线 $l: x - \sqrt{3}y - a = 0$ 与圆 $C: (x-3)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 4$ 交于点 M, N , 点 P 在圆 C 上,

且 $\angle MPN = \frac{\pi}{3}$, 则实数 a 的值等于

- (A) 2 或 10 (B) 4 或 8 (C) $6 \pm 2\sqrt{2}$ (D) $6 \pm 2\sqrt{3}$

11. 若圆锥 SO_1, SO_2 的顶点和底面圆周都在半径为 4 的同一个球的球面上, 两个圆锥的母线长分别为 $4, 4\sqrt{2}$, 则这两个圆锥重合部分的体积为

- (A) $\frac{8}{3}\pi$ (B) 8π
 (C) $\frac{56}{3}\pi$ (D) $\frac{56+16\sqrt{3}}{3}\pi$

12. 已知 $t > 2$, 点 $A(t, \ln t), B(t+2, \ln(t+2)), C(t+4, \ln(t+4))$, 则 $\triangle ABC$ 面积的取值范围是

- (A) $(0, 1)$ (B) $(0, \ln 2)$ (C) $(0, \ln \frac{3}{2})$ (D) $(0, \ln \frac{4}{3})$

第 II 卷(非选择题共 90 分)

本卷包括必考题和选考题两部分. 第(13)题~第(21)题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第(22)题、第(23)题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 抛物线 $x^2=8y$ 的焦点坐标为_____.

14. 设点 (x, y) 是不等式组 $\begin{cases} x \leq 1 \\ y - x \leq 0 \\ x + y + 2 \geq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域内的点, 则过点 (x, y) 和点 $(-2, -4)$

的直线的斜率的取值范围是_____.

15. 函数 $f(x) = x^2 - 2x - 1 - |x - 1|$ 的所有零点之和等于_____.

16. 已知函数 $f(x) = \cos 2x + \sin x$, 若对任意实数 x , 恒有 $f(a_1) \leq f(x) \leq f(a_2)$, 则 $\cos(a_1 - a_2) =$ _____.

三、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的递减数列, 且 $a_3 + a_4 = 6a_5$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若 $b_n = na_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

在第十五次全国国民阅读调查中, 某地区调查组获得一个容量为 200 的样本, 其中城镇居民 150 人, 农村居民 50 人. 在这些居民中, 经常阅读的城镇居民 100 人, 农村居民 24 人.

(I) 填写下面列联表, 并判断是否有 97.5% 的把握认为, 经常阅读与居民居住地有关?

	城镇居民	农村居民	合计
经常阅读	100	24	
不经常阅读			
合计			200

(II) 依据阅读习惯, 调查组从该地区样本城镇居民中分层抽取 6 人, 参加一次阅读交流活动. 若活动主办方从这 6 位居民中随机选取 2 人作交流发言, 求被选中的 2 位居民都是经常阅读居民的概率.

附: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a + b + c + d$.

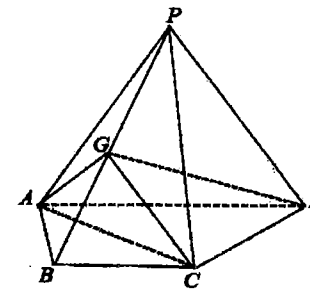
$P(K^2 \geq k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AB = BC = CD = \frac{1}{2}AD$, G 是 PB 的中点, $\triangle PAD$ 是等边三角形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.

(I) 求证: $CD \perp$ 平面 GAC ;

(II) 求三棱锥 $D-GAC$ 与三棱锥 $P-ABC$ 的体积之比.



20. (本小题满分 12 分)

已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 点 $P(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 在椭圆 C 上,

且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 设过点 F_1 的直线 l 交椭圆于点 A, B , 求 $\overrightarrow{F_2A} \cdot \overrightarrow{F_2B}$ 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{(a-1)x - x^2 - 1}{e^x}$ (e 为自然对数的底数).

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(II) 求证: 当 $a \geq 3 - e$ 时, 对 $\forall x \in [0, +\infty)$, $f(x) \geq -1$.

请考生在第(22)、(23)题中任意选择一题作答. 注意: 只能做所选定的题目, 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时, 请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数, $\alpha \in [0, \pi]$). 在以直角坐

标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 E 的方程为 $\rho^2(1 + 3\sin^2\theta) = 4$.

(I) 求曲线 C 和曲线 E 的直角坐标方程;

(II) 若直线 $l: x = t$ 分别交曲线 C 、曲线 E 于点 A, B , 求 $\triangle AOB$ 面积的最大值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

设 $f(x) = 3|x-1| + |x+1|$ 的最小值为 k .

(I) 求实数 k 的值;

(II) 设 $m, n \in \mathbb{R}, m \neq 0, m^2 + 4n^2 = k$, 求证: $\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2 + 1} \geq \frac{3}{2}$.